

УДК 691.11

РАБОТА БРУСА СТЕНОВОЙ КОНСТРУКЦИИ КАК БАЛКИ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Торопов Александр Степанович

доктор технических наук, профессор

Бызов Виктор Евгеньевич

кандидат технических наук, доцент

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургская государственная художественно-промышленная академия имени А. Л. Штиглица», г. Санкт-Петербург

Аннотация. В статье представлены результаты исследований по определению характеристик определяющих поведение бруса из древесины в стеновой конструкции. Брус рассмотрен лежащим основанием на других брусках. Брус на которых лежит брус представлены как упругое основание. Таким образом, брус рассматривается как балка на упругом основании. На брус действует равномерно распределенная нагрузка от других выше расположенных элементов здания. Брус шарнирно закреплен в концах. Получены значения изгибающего момента, перерезывающей силы, усилия отпора и прогибов бруса.

Ключевые слова: стеновая конструкция, упругое основание, балка из древесины, изгибающий момент, прогиб бруса.

В настоящее время все более интенсивно развивается малоэтажное домостроение. Древесина широко применяется при строительстве малоэтажных домов [1]. Пилопродукцию получают с применением специальных методов раскря круглых лесоматериалов. Из круглых лесоматериалов возможно получать конструкционную пилопродукцию в виде бруса [2]. Брус полученные при раскря могут быть применены для изготовления стен здания. Применение древесины в стеновых конструкциях обеспечивает необходимые тепловые характеристики зданию. Брус в стеновой конструкции располагаются друг над другом. Конструкция из брус воспринимает вертикальные нагрузки от вышележащих элементов здания опирающихся на стены [3]. В тоже время каждый из брус опирается на соседний нижележащий брус, который является для него упругим основанием. В данном исследовании определили характеристики напряженно-деформированного состояния бруса в стеновой конструкции.

Деформацию бруса в стеновой конструкции можно представить как деформацию балки на упругом основании от нагрузки, распределенной по произвольному закону. Балкой на упругом основании называется брус, лежащий на упругом основании, на который кроме заданных внешних сил $q(x)$ действуют еще реактивные силы $g(x)$ - реакции упругого основания (рисунок 1)

[4, с.4]. Приняли, что балка загружена равномерно-распределенной нагрузкой и шарнирно закреплена в концах. Определили прогибы балки. Реакция от нижележащего бруса в произвольной точке длины балки выражается формулой:

$$g(z) = -k_0 \cdot w(z) \quad (1)$$

где $g(z)$ – реакция упругого основания, приходящаяся на единицу длины балки, (Н/м); $w(z)$ – прогиб балки от нагрузки, м; k_0 – коэффициент отпора.

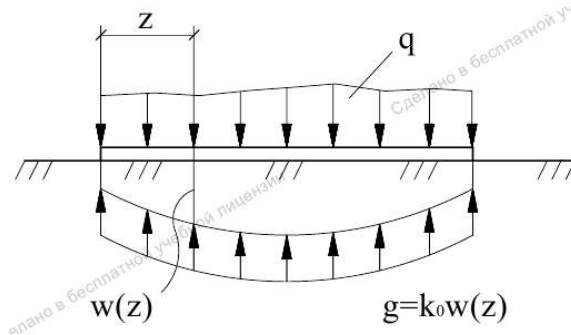


Рис. 1. Схема нагрузок действующих на балку на упругом основании:

z - расстояние от торца до произвольного сечения балки; q - интенсивность равномерно-распределенной нагрузки; $w(z)$ - функция прогибов балки;
 $g(z)$ - функция реакции упругого основания.

Коэффициент отпора k_0 представляет собой отпор нижележащего бруса, приходящийся на 1 м² площади балки при просадке равной единице. Знак минус показывает, что реакция противоположна прогибу. $k_0 = k \cdot b$, где k – коэффициент жесткости основания (коэффициент постели), МПа/м, b – ширина балки, м

Интенсивность нагрузки действующей на балку приняли как сумму внешней и реактивной нагрузок. Суммарная интенсивность $p(z)$ нагрузки, действующей на балку, определяется по формуле:

$$p(z) = g(z) + q(z) = -k \cdot b \cdot w(z) + q(z) \quad (2)$$

где $q(z)$ – заданная распределенная нагрузка, Н/м.

Дифференциальное уравнение изгиба упругой балки имеет вид:

$$EI_z w^{IV}(z) = p(z) \quad (3)$$

После подстановки выражения (2) в уравнение изгиба получили:

$$EI_z w^{IV}(z) + k \cdot b \cdot w(z) = q(z) \quad (4)$$

При постоянном сечении балки введем обозначение $\frac{k \cdot b}{EI_z} = 4m^4$. Тогда $m = \sqrt[4]{\frac{k \cdot b}{4EI_z}}$. m – модуль деформации основания, м⁻¹. Модуль деформации является основной характеристикой дифференциального уравнения изгиба балки на упругом основании. Тогда дифференциальное уравнение (4) можно записать как:



$$w^{IV}(z) + 4m^4 w(z) = q(z)/EI_z \quad (5)$$

Имеется зависимость между изгибающими моментами и интенсивности нагрузки:

$$M''(z) = q(z) + kbw(z) \quad (6)$$

Дважды дифференцируем выражение (6) и получаем:

$$M^{IV}(z) = q''(z) + kbw''(z)$$

Однако $w''(z) = -\frac{M(z)}{EI}$ и следовательно

$$M^{IV}(z) + 4m^4 M(z) + q''(z) \quad (7)$$

Интегрируем дифференциальное уравнение изгибающих моментов. Нагрузку на балку считаем равномерно распределенной. Уравнение (7) примет вид:

$$M^{IV}(z) + 4m^4 M = 0 \quad (8)$$

Общий интеграл уравнения (8) записывается следующим образом:

$$M(z) = A_1 \cdot e^{r_1 z} + A_2 \cdot e^{r_2 z} + A_3 \cdot e^{r_3 z} + A_4 \cdot e^{r_4 z},$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 - произвольные постоянные; r_1, r_2, r_3, r_4 - корни характеристического уравнения.

Характеристическое уравнение для выражения (8) имеет вид:

$$r^4 + 4m^4 = 0 \quad (9)$$

Корни характеристического уравнения имеют следующие комплексные выражения $r_1 = m + mi, r_2 = m - mi, r_3 = -m + mi, r_4 = -m - mi$.

Переходя от показательных функций $e^{r_i z}$ к гиперболо-тригонометрическим получили выражение:

$$M(z) = C_1 \cos(mz) \operatorname{ch}(mz) + C_2 \sin(mz) \operatorname{ch}(mz) + C_3 \cos(mz) \operatorname{sh}(mz) + C_4 \sin(mz) \operatorname{sh}(mz), \quad (10)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 - произвольные постоянные; $\operatorname{sh}(mz)$ и $\operatorname{ch}(mz)$ - гипорболические синус и косинус, связанные с показательными функциями следующими зависимостями:

$$\frac{e^{mz} - e^{-mz}}{2} = \operatorname{sh}(mz), \quad \frac{e^{mz} + e^{-mz}}{2} = \operatorname{ch}(mz).$$

При этом $\operatorname{sh}(mz) + \operatorname{ch}(mz) = 1$.

Уравнение решаем методом начальных параметров. Так как нагрузка непрерывна на протяжении всей балки все величины описываются общими уравнениями. Выражаем произвольные постоянные через условия в начале координат, помещаемые на левом конце балки.

При $z = 0$ имеют место начальные параметры: $M(0) = M_{z=0}, Q(0) = Q_{z=0}, p(0) = p_{z=0}, p'(0) = p'_{z=0}$. Так как $\operatorname{ch}(mz)\cos(mz) = 1$ и $z = 0$, а остальные функции обращаются в нуль получаем выражения произвольных постоянных через начальные параметры: $M(0) = C_1, Q(0) = m(C_2 + C_3), p(0) = m^2 2C_4,$

$$p'(0) = m^2 2(C_2 - C_3). \text{ Отсюда находим произвольные постоянные: } C_1 = M(0); C_2 = \frac{Q(0)}{2m} + \frac{p'(0)}{4m^3}; C_3 = \frac{Q(0)}{2m} - \frac{p'(0)}{4m^3}; C_4 = \frac{p_0}{2m^2}.$$



Теперь уравнение (10) можно записать в следующем виде:

$$M(z) = M(0)\cos(mz)\operatorname{ch}(mz) + \left(\frac{Q(0)}{2m} + \frac{p'(0)}{4m^3}\right)\sin(mz)\operatorname{ch}(mz) + \\ + \left(\frac{Q(0)}{2m} + \frac{p'(0)}{4m}\right)\cos(mz)\operatorname{sh}(mz) + \left(\frac{p_0}{2m^2}\right)\sin(mz)\operatorname{sh}(mz) \quad (11)$$

Выполнив преобразования получили:

$$M(z) = M(0)A_{mz} + \frac{Q(0)}{m}B_{mz} + \frac{p(0)}{m^2}C_{mz} + \frac{p'}{m^3}D_{mz}. \quad (12)$$

$$\text{В этом уравнении } A_{mz} = \cos(mz)\operatorname{ch}(mz); \quad B_{mz} = \frac{\sin(mz)\operatorname{ch}(mz) + \cos(mz)\operatorname{sh}(mz)}{2}; \quad C_{mz} = \\ = \frac{\sin(mz)\operatorname{sh}(mz)}{2}; \quad D_{mz} = \frac{\sin(mz)\operatorname{ch}(mz) - \cos(mz)\operatorname{sh}(mz)}{4}.$$

Это выражения функций Крылова. Числовые значения этих функций приведены в [5].

Функции обладают следующими свойствами. При $z=0$ $A_0=1$;

$B_0 = C_0 = D_0 = 0$. Между этими функциями существует дифференциальная зависимость

$$\frac{d}{dz}(A_{mz}) = -4mD_{mz}; \quad \frac{d}{dz}(B_{mz}) = mA_{mz}; \quad \frac{d}{dz}(C_{mz}) = mB_{mz};$$

$$\frac{d}{dz}(D_{mz}) = mC_{mz}.$$

Применив эти дифференциальные зависимости получили уравнения:

$$Q(z) = -4mM(0)D_{mz} + Q(0)A_{mz} + \frac{p(0)}{m}B_{mz} + \frac{p'}{m^2}C_{mz};$$

$$p(z) = -4m^2M(0)C_{mz} - 4mQ(0)D_{mz} + p(0)A_{mz} + \frac{p'}{m}B_{mz};$$

$$p'(z) = -4m^3M(0)B_{mz} - 4m^2Q(0)C_{mz} - 4mp(0)D_{mz} + p'(0)A_{mz}.$$

При любом виде закрепления концов балки два из четырех условий на каждом конце балки заведомо известны. Следовательно, при непрерывной нагрузке по всей длине балки задача сводится к нахождению двух неизвестных начальных параметров. Для их определения составляются два уравнения по заведомо известным условиям в закреплении в правом конце балки.

Рассмотрен брус стеновой конструкции как балка на упругом основании (рисунок 2).

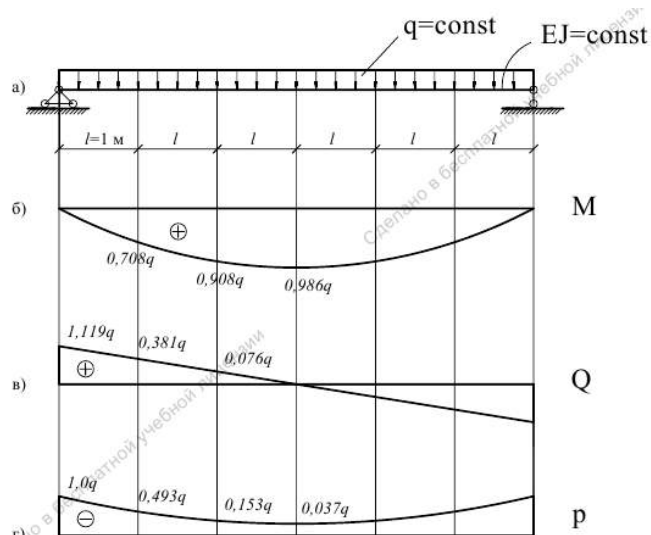


Рис. 2. Схема балки и эпюры напряженно-деформированного состояния балки:

- а) - схема балки на упругом основании; б) - эпюра изгибающих моментов M ;
в) - эпюра поперечных сил Q ; г) - эпюра суммарной нагрузки на балку p

Балка имеет длину $L=6,0$ м. Размеры поперечного сечения балки: ширина $b=0,2$ м; высота $h=0,2$ м. $k=20$ МПа/м. $E=11000$ МПа. $q=5000$ Н/м.

Момент инерции поперечного сечения находим по формуле:

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = (0.2 \cdot 0.2^3) / 12 = 1.3 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4.$$

Модуль деформации основания m находим по формуле:

$$m = \sqrt[4]{\frac{k \cdot b}{4EI}} = \sqrt[4]{\frac{20 \cdot 10^6 \cdot 0.2}{4 \cdot 11 \cdot 10^9 \cdot 1.3 \cdot 10^{-4}}} = 0,5 \text{ м}^{-1}.$$

Начальные параметры и известные граничные условия на правом конце балки $M_0=0$, $Q_0=?$, $p_0=-q$, $p'_0=?$, $M_l=0$, $p_l=q$. При $x=l$ $M(l)=0$, а при $x=l/2$ $Q_{0,5l}=0$. Составили систему двух уравнений для определения неизвестных начальных параметров:

$$M_l = \frac{Q(0)}{m} B_{ml} - \frac{q}{m^2} C_{ml} + \frac{p'(0)}{m^3} D_{ml} = 0; \quad (9)$$

$$Q_{0,5l} = Q(0) A_{0,5ml} - \frac{q}{m} B_{0,5ml} + m \left(\frac{p'(0)}{m^3} \right) C_{0,5ml} = 0.$$

Для построения эпюр разбиваем ось балки на 6 участков. Находим значения коэффициентов A , B , C и D для узловых точек по таблицам гиперболо-круговых функций (функций Крылова) [5].

Таблица. Значения коэффициентов узловых точек гиперболо-круговых функций

l	ml	A	B	C	D
0	0	1	0	0	0
1	0,5	0,9895	0,49895	0,1249	0,0208



2	1,0	0,8337	0,96675	0,49445	0,1659
3	1,5	0,1664	1,2485	1,06195	0,5490
4	2,0	-1,56563	0,95582	1,64895	1,23256
5	2,5	-4,91284	-0,58854	1,81044	2,12927
6	3,0	-9,96691	-4,24844	0,70686	2,83459

$$-\frac{Q(0)}{0,5} \cdot 4,2484 - \frac{q}{0,5^2} \cdot 0,7069 + \frac{p'_0}{0,5^3} \cdot 2,8346 = 0;$$

$$Q(0) \cdot 0,1664 - \frac{q}{0,5} \cdot 1,2486 + 0,5 \cdot \frac{p'_0}{0,5^3} \cdot 1,0620 = 0. \quad (10)$$

Решив эту систему уравнений получили:

$$Q = 1,1191q; \quad \frac{p'_0}{0,5^3} = 4,3521q.$$

$$M(z) = -\frac{1,1191q}{0,5} \cdot B_{mz} - \frac{q}{0,5^2} \cdot C_{mz} + 4,3521q \cdot D_{mz} = 0$$

Подставив в эту формулу коэффициенты B , C , D для узловых точек, установили значения изгибающего момента:

$$M(0) = 0; M(1) = 0,708q; M(2) = 0,908q; M(3) = 0,936q; M(4) = 0,908q;$$

$$M(5) = 0,708q; M(6) = 0.$$

$$Q(z) = Q(0)A_{mz} - \frac{q}{0,5} B_{mz} + 0,5 \frac{p'_0}{0,5^3} C_{mz}$$

Также подставив соответствующие коэффициенты установили значения поперечных усилий:

$$Q(0) = 1,119q; Q(1) = 0,381q; Q(2) = 0,076q; Q(3) = 0; Q(4) = -0,707q;$$

$$Q(5) = -0,381q; Q(6) = -1,119q.$$

Нашли значения реакции отпора основания по формуле:

$$p(z) = -4mQ(0)D_{mz} + p(0)A + \frac{p'_0}{0,5} B.$$

Значения реакции отпора основания равны:

$$p(0) = q; p(1) = 0,493q; p(2) = 0,153q; p(3) = 0,037q; p(4) = 0,153q; p(5) = 0,493q; p(6) = q.$$

Построили соответствующие эпюры значений изгибающих моментов, поперечных сил и реакций опоры основания (рис.2б-г). Эпюру прогибов $w(z)$ строим в соответствии с формулой $p(z) = -k \cdot b \cdot w(z) + q(z)$. Значения прогибов балки находим следующим образом:

$$w(z) = \frac{q(z) - p(z)}{kb}.$$

Значения прогибов в узловых точках при равномерно распределенной нагрузке $q = 5000$ Н/м составляют: $w(0) = 0$; $w(1) = 0,634$ мм; $w(2) = 1,059$ мм;

$w(3) = 1,204$ мм; $w(4) = 1,059$ мм; $w(5) = 0,634$ мм; $w(6) = 0$; Строим эпюру прогибов балки на упругом основании (рисунок 3).

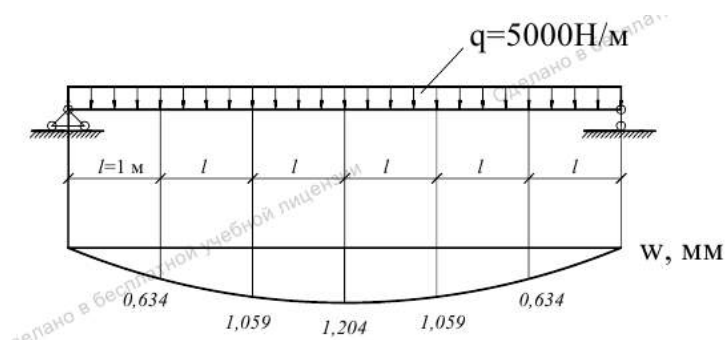


Рис. 3. Эпюра прогибов балки на упругом основании

При проведении исследований по определению прогибов стенового бруса установлено, что максимальное значение прогиба находится на середине его длины и составляет 1,2 мм. Анализ эпюр показывает, что эпюры изгибающих моментов M и реакций опоры p симметричны. Это подтверждает точность выполненных вычислений. Между эпюрами соблюдаются необходимые дифференциальные зависимости. Выполненные исследования позволяют прогнозировать поведение стенового бруса в конструкции при эксплуатационных нагрузках.

Список литературы:

1. Худайбердиева Н., Джумаев А., Гурбанов А. Проблемы и перспективы малоэтажного строительства: особенности и популярность среди населения / Н. Худайбердиева, А. Джумаев, А. Гурбанов // Международный научный журнал «Инновационная наука». - 2004. - №11-2-2. - С. 194-196.
2. Бызов В. Е., Лабудин Б. В., Мелехов В. И. Применение пиломатериалов с сердцевинными включениями в деревянных конструкциях / В. Е. Бызов, Б. В. Лабудин, В. И. Мелехов // Современные металлические и деревянные конструкции (нормирование, проектирование и строительство): сб. науч. тр. международного симпозиума - Брест, 2009. - С. 23-27.
3. Хайруллин Л. Р. Исследование несущей способности стен деревянного дома, выполненного по технологии «Двойной брус» / Л. Р. Хайруллин // Известия КГАСУ, Строительные конструкции, здания и сооружения. - 2015. - №4(34), - С. 178-182.
4. Методическое пособие по строительной механике для выполнения расчетно-графической работы на тему «Расчет балок на упругом основании». Орел. Изд-во ОрелГТУ, 2007. - 65 с.
5. Крылов А. Н. О расчете балок на упругом основании. Изд-е 2-е. Изд-во Академии наук СССР. Л., 1931. - 155 с.