



## Метод линеаризации для задач нелинейного программирования

Арсланова Юлия Викторовна

студент  
ФГБОУ ВО

**Аннотация.** Теория и методы оптимизации находят приложение в многочисленных в задачах экономики, автоматическом управлении, инженерном деле и т.д. В статье излагаются основы метода линеаризации – одного из наиболее эффективных методов решения задач нелинейного программирования.

Метод линеаризации тесно связан с методом Ньютона решения систем уравнений, с методом штрафных функций, в частности, негладких штрафных функций, а, значит, с методами недифференцируемой оптимизации. Успешное применение метода линеаризации невозможно без эффективного решения задач квадратичного программирования, что связывает его с методами сопряженных градиентов и переменной метрики.

**Постановка задачи:** Рассмотрим задачу нелинейного программирования.

Требуется минимизировать функцию  $f_0(x)$ ,  $x \in R^n$  на множестве  $X$ , которое представляет собой совокупность неравенств и равенств.

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$X : f_i(x) \leq 0, i \in I^-, f_i(x) = 0, i \in I^0, \quad (1)$$

$$x \in R^n$$

где  $f_0(x), f_i(x) \in C^1$  непрерывно дифференцируемы,  $I^-, I^0$  – конечные индексные множества,  $X$  – допустимое множество.

Для простоты будем рассматривать задачу только с ограничениями неравенства, считая, что каждое ограничение равенства можно представить как два ограничения неравенства.

Итак, далее будем рассматривать задачу следующего вида

$$f_0(x) \rightarrow \min$$

$$X : f_i(x) \leq 0, i \in I, \quad (2)$$

$$x \in R^n$$

Введем понятия глобального решения задачи (2) и локального решения задачи (2).

**Определение.** Точка  $x^* \in X$  называется

1) точкой *глобального* минимума функции  $f_0(x)$  на множестве  $X$ , или *глобальным* решением задачи (2) если

$$f_0(x_*) \leq f_0(x), \forall x \in X$$



2) точкой *локального* минимума функции  $f_0(x)$  на множестве  $X$ , или *локальным* решением задачи (2), если  $\exists \varepsilon > 0$ :

$$f_0(x_*) \leq f_0(x), \forall x \in X \cap U_\varepsilon(x_*),$$

Введем в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(x, u) = f_0(x) + \sum_{i=1}^m u^i f_i(x)$$

(линейная комбинация функции  $f_i(x)$  с коэффициентами  $u_i$ )

**Определение.** Точка  $x_* \in X$  удовлетворяющая при некотором векторе  $u = (u^1, u^2, \dots, u^m)$  условию

$$L'_x(x_*, u) = 0$$

называется *стационарной* точкой задачи (2).

### Условие оптимальности

Пусть  $f_0(x), f_i(x) \in C^1, i \in I$  - непрерывно дифференцируемые функции, а  $X$  – выпуклое множество.

Пусть  $x_*$  - решение задачи (1').

Введем в рассмотрение множество

$$K_X(x_0) = \{p : p = \lambda(x - x_0), \lambda > 0, x \in X\}.$$

Тогда справедлива следующая теорема:

**Теорема.** Для того чтобы точка  $x_*$  была решением задачи (2), необходимо, чтобы нашлись не равные нулю одновременно числа  $u^i, i \in \{0\} \cup I$ , такие что

$$u^0 f'_0(x_*) + \sum_{i \in I} u^i f'_i(x_*) \in K_X(x_*).$$

$$u^i \geq 0, i \in \{0\} \cup I, u^i f_i(x_*) = 0, i \in I.$$

Где  $u^i$  - множители Лагранжа.

### Основные предположения.

Введем обозначения

$$F(x) = \max_{i \in I} f_i(x),$$

$$I_\delta(x) = \{i \in I : f_i(x) \geq F(x) - \delta\}, \delta \geq 0.$$

В силу ранее сделанного предположения  $F(x) \geq 0$  при  $\forall x$ .



Предположим, что существуют такие константы  $N > 0, \delta > 0$ , что

а) множество

$$\Omega_N = \{x : f_0(x) + NF(x) \leq C_0\}, C_0 = f_0(x_0) + NF(x_0),$$

ограничено.

Обозначим

$$\Phi_N = f_0(x) + NF(x).$$

б) градиенты функций  $f_i(x), i \in \{0\} \cup I$ , в  $\Omega_N$  удовлетворяют условию Липшица, т.е. ( $L > 0$ )

$$\|f'_i(x_1) - f'_i(x_2)\| \leq L\|x_1 - x_2\|;$$

в) задача квадратичного программирования

$$\begin{aligned} \min((f'_0(x), p) + \frac{1}{2}\|p\|^2), \\ (f'_i(x), p) + f_i(x) \leq 0, i \in I_\delta(x), \end{aligned} \quad (3)$$

разрешима относительно  $p \in E^n$  при любом  $x \in \Omega_N$ , и существует такие множители Лагранжа  $u^i(x), i \in I_\delta(x)$ , что  $\sum_{i \in I_\delta(x)} u^i(x) \leq N$ .

Решение задачи (3) -  $p(x)$ , а множители Лагранжа – через  $u^i(x), i \in I_\delta(x)$ .

### Формулировка алгоритма.

Пусть  $x_0$  – начальное приближение и выбрано  $\varepsilon, 0 < \varepsilon < 1$ . Пусть в процессе работы алгоритма уже получена точка  $x_k$ . Построение следующего приближения производим в два этапа.

1. Решаем вспомогательную задачу (3) при  $x = x_k$ , находим ее решение – вектор  $p_k = p(x_k)$ .

2. Находим очередное приближение  $x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$ , где  $\alpha_k = 2^{-i_0}$ ,

а  $i_0$  наименьшее из  $i = 0, 1, \dots$ , при котором будет впервые выполнено неравенство

$$f_0(x_k + (\frac{1}{2})^i p_k) + NF(x_k + (\frac{1}{2})^i p_k) \leq f_0(x_k) + NF(x_k) - (\frac{1}{2})^i \varepsilon \|p_k\|^2.$$

Таким образом, на каждом шаге выполняется следующее неравенство:

$$f(x_{k+1}) + NF(x_{k+1}) \leq f(x_k) + NF(x_k) - \alpha_k \varepsilon \|p_k\|^2.$$

### Свойства метода линеаризации.

1. Выбор шага  $\alpha_k$  на каждой итерации осуществляется за конечное число дроблений единицы пополам.



## 2. Сходимость алгоритма.

Сходимость алгоритма следует из утверждения

*Теорема. При выполнении сделанных выше предположений процесс обладает следующими свойствами:*

*а)  $F(x_k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ ;*

*б) в любой предельной точке  $x_* \in X$  последовательности  $x_k, k = 0, 1, \dots$ , выполняется необходимые условия минимума  $f_0(x)$ .*

*Следствие. Если единственной точкой, в которой выполняется необходимое условие минимума, является точка минимума, то порождаемая алгоритмом последовательность сходится к точке минимума функции  $f_0(x)$ .*

Основной операцией, требующей значительных вычислений при реализации алгоритма на каждом шаге, является решение задачи квадратичного программирования (3).

Построим двойственную задачу для задачи (3). Двойственной задачи имеет вид (4)

$$\max_u \{ \varphi(u) = -\frac{1}{2}(Au, u) + (d, u) + C : u^i \geq 0, i \in I_\delta(x) \} \quad (4)$$

где  $A$  – симметричная матрица и состоит из элементов

$$\{a_{ij}\} = \{f'_i(x) f_j'^*(x)\}, i, j \in I_\delta(x),$$

( $i$ -я компонента вектора  $d$  равна )  $d = (f'_0(x) f_0'^*(x) + f_i(x), i \in I_\delta(x))$

$$a \ C = \frac{1}{2} f'_0(x) f_0'^*(x)$$

Таким образом, получили задачу максимизации квадратичной формы при простых ограничениях, которую удобно решать, например, методом сопряженных градиентов. В результате решения получаем множители Лагранжа  $u^i(x)$  - решение двойственной задачи, а подстановка  $u^i(x)$  в (5)

$$p = -f'_0(x) - \sum_{i \in I_\delta(x)} u^i f'_i(x) \quad (5)$$

дает вектор  $p(x)$  - решение исходной задачи.

### Алгоритм

Опишем теперь алгоритм метода линеаризации. Пусть выбраны произвольное начальное приближение  $x_0$ , точность решения исходной задачи (2)  $\varepsilon_1$ , точность решения вспомогательной задачи (4)  $\varepsilon_2$  и величины  $N_0 > 0, \delta_0 > 0, 0 < \varepsilon < 1$ .

Общий шаг алгоритма. Пусть точка  $x_k$  и числа  $N_k, \delta_k$  построены.

1. Строим множество  $I_\delta(x_k)$  и задачу (4).



2. Решаем задачу (4). Ее решение – множители Лагранжа  $u_i^k, i \in I_\delta(x_k)$ . Если задача (4) неразрешима, то полагаем

$$x_{k+1} = x_k, \delta_{k+1} = \delta_k / 2, N_{k+1} = N_k$$

И возвращаемся к 1.

3. Если решение задачи (4) получено и

$$N_k \geq \sum_{i \in I_\delta(x_k)} u_k^i, \text{ то } N_{k+1} = N_k.$$

В противном случае

$$N_{k+1} = 2 \sum_{i \in I_\delta(x_k)} u_k^i.$$

4. Вычисляем вектор направления движения

$$p_k = -f_0'(x_k) - \sum_{i \in I_\delta(x_k)} u_k^i f_i'(x_k).$$

5. Если

$$\|p_k\|^2 \leq \varepsilon_1,$$

то  $x_k$  решение задачи (2).

6. Если не выполняется, то полагаем

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k, \delta_{k+1} = \delta_k,$$

где  $\alpha_k$  выбирается равным  $1/2^{q_0}$ , а  $q_0$  наименьшее из целых чисел наименьшее из целых чисел  $q=0,1,\dots$ , для которого выполняется соотношение

$$\Phi_{N_{k+1}}(x_k + \frac{1}{2^q} p_k) \leq \Phi_{N_{k+1}}(x_k) - \frac{1}{2^q} \varepsilon \|p_k\|^2.$$

Возвращаемся к 1.

**Примеры.** Найти минимум

$$f_0(x) = 0.5(x_1 + x_2)^2 + 50(x_2 - x_1)^2 + x_3^2$$

при ограничениях

$$f_1(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 - 1.5 \leq 0$$

$$f_2(x) = \sin(x_1 + x_2) - x_3 = 0.$$

Начальная точка  $x_0 = (-1, 4, 5)$ . Минимум в точке  $x_* = (-0.229, 0.229, 0.442)$

и значение  $f(x_*) = 0.3$ .

Метод линеаризации базируется на идее линейной аппроксимации целевой функции и ограничений задачи в окрестности очередной точки. В этом смысле он выступает как развитие



метода условного градиента. Вместе с тем метод линеаризации содержит и качественно новые моменты.

Заменим в точке  $x_0$  (нач.прибл.) все ограничения (1) и  $f_0(x)$  на линейные, линеаризовав  $f_i(x)$  в точке  $x_0$ . В результате получится некоторая задача линейного программирования. Естественно было бы решение линеаризованной задачи взять в качестве следующего приближения, как это делается в методе Ньютона для решения систем нелинейных уравнений. Но прямо этот путь не приводит к цели, так как обычно вспомогательная задача линейного программирования не имеет решения. Поэтому наложим некоторые ограничения на приращения вектора  $x$  в точке  $x_0$ , чтобы решение линеаризованной задачи в точке  $x_0$  не уходило слишком далеко от  $x_0$ , оставаясь в такой окрестности  $x_0$ , в которой линеаризация еще справедлива. Для этого будет добавлен квадратичный член к линеаризованной целевой функции.

#### Список литературы:

1. Гавурин М.К., Малозёров В.Н. Экстремальные задачи с линейными ограничениями. Л.: Изд-во ЛПУ, 1984, 176 с.
2. Пшеничный Б.Н. Метод линеаризации. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы – 1983 г. – 136 с.