

Раздел Физико-математические науки

42 (Сентябрь) 2020

УДК 511.11

РЕШЕНИЕ ГИПОТЕЗЫ ЛЕЖАНДРА С ПОМОЩЬЮ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ
ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

Ёлочкин Сергей Владимирович

Аннотация. Использование преобразования логарифмических функций как функция распределения простых чисел $\pi(n)$ и вызвало появление решения гипотезы Лежандра.

Ключевые слова: Промежутки простых чисел, одна из проблем Ландау, гипотеза Лежандра, гипотеза Андрицы, гипотеза Оппермана, гипотеза Римана, гипотеза Крамера, спираль Улама, функция распределении простых чисел.

Введение.

(Всё, что использовано во "Введение", взято из Википедии)

Гипотеза Лежандра — математическая гипотеза из семейства результатов и гипотез относительно интервалов между простыми числами, согласно которой для любого натурального n существует простое число между n^2 и $(n+1)^2$. Является одной из проблем Ландау. Сформулирована Лежандром в 1808 году, по состоянию на 2020 год ни доказана, ни опровергнута.

Промежутки простых чисел - Из теоремы о распределении простых чисел следует, что число простых чисел между n^2 и $(n+1)^2$ асимптотически стремится к $n/\text{Ln}(n)$. Поскольку это число растёт при росте n , это даёт основания для гипотезы Лежандра.

Если гипотеза верна, интервал между любым простым p и следующим простым всегда должен быть порядка $\sqrt{p}$ а в O - нотации интервал равен $O(\sqrt{p})$. Две более сильные гипотезы — гипотеза Андрицы и гипотеза Оппермана — предполагают то же самое поведение интервалов. Гипотеза не даёт решение гипотезы Римана, но усиливает одно из следствий в случае верности гипотезы.

Если верна гипотеза Крамера (о том, что промежутки имеют порядок $(\text{Ln}(n))^2$), то гипотеза Лежандра будет следовать из неё для достаточно больших n . Крамер также показал, что из гипотезы Римана вытекает более слабая граница $O(\sqrt{p} \text{Log } p)$ размера наибольшего

интервала между простыми числами.

Контрпример в районе 10^{18} должен был бы иметь интервал в 50 миллионов раз больше среднего интервала.

Из гипотезы Лежандра следует, что по меньшей мере одно простое может быть найдено в каждой половинке оборота спирали Улама.

Теорема о распределении простых чисел — теорема аналитической теории чисел, описывающая асимптотику распределения простых чисел. А именно, она утверждает, что функция распределения простых чисел $\pi(n)$ (количество простых чисел на отрезке $[1;n]$) растёт с увеличением n как $\frac{n}{\ln(n)}$, то есть:

$$\frac{\pi(n)}{n/\ln(n)} \rightarrow 1, \text{ когда } n \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Таким образом, необходимо доказать такое уравнение, как:

$$\pi(n+1)^2 - \pi(n^2) \geq 1. \quad (2)$$

Преобразования логарифмических формул для решения гипотезы Лежандра.

Из уравнения (2), используя ф.(1), можно записать $\pi(n+1)^2 - \pi(n^2) \geq$

$$\geq \frac{(n+1)^2}{\ln(n+1)^2} - \frac{n^2}{\ln(n)^2} = \quad (3)$$

Из логарифмов будем выносить квадратные степени как коэффициент 2, что справедливо в [6, 1.2-8, с.29]

$$= \frac{(n+1)^2}{2 \ln(n+1)} - \frac{n^2}{2 \ln(n)} \quad (4)$$

Далее, из суммы двух дробей получаем выражение общей дроби:

$$= \frac{(n+1)^2 \ln(n) - n^2 \ln(n+1)}{2 \ln(n+1) \ln(n)} \quad (5)$$

Отдельно выпишем разложение логарифма $\ln(n+1)$ на две части:

$$\begin{aligned}
 \ln(n+1) &= \ln \left[n \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \\
 &= \ln(n) + \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \\
 &= \ln(n) + \frac{n}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \\
 &= \ln(n) + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n
 \end{aligned}$$

Сначала из выражения $(n+1)$ выносится n и получается $n(1+1/n)$. Затем из логарифма произведений получается сумма логарифмов сомножителей. Затем второе слагаемое умножается на выражение n/n , что тождественно 1. И, в заключение, числитель дроби, равное n , вносится в логарифм в качестве степени, что приводит к такому результату:

$$\ln(n+1) = \ln(n) + \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Продолжая (5), заменяем $\ln(n+1)$ на вышеуказанный результат в числителе (но не в знаменателе!) и раскрывая скобки, получаем:

$$= \frac{n^2 \ln(n) + 2n \ln(n) + \ln(n) - n^2 \ln(n) - n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{2 \ln(n+1) \ln(n)} \quad (6)$$

В числителе (6), выражения первого и четвертого слагаемых, т.е. $n^2 \ln(n)$, сокращаются, а выражения второго и последнего, в которых состоят сомножители значения n выносятся за скобки, получается следующее:

$$= \frac{n \left(2 \ln(n) - \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) + \ln(n)}{2 \ln(n+1) \ln(n)} = \quad (7)$$

Затем делятся числитель и знаменатель в дроби (7) на $\ln(n)$, получается следующее:

$$= \frac{n \left(2 - \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n}{\ln(n)} \right) + 1}{2 \ln(n+1)} > \quad (8)$$

Как воспользуемся выражением $\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$, которое при росте n начинает от $= 2$ до бесконечности стремится к $e = 2.71828...$, то результат выражения $\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ стремится в этом от $0,81...$ до 1 , при n стремится в бесконечность. Следовательно, изменяется выражение (8) к выражению (9):

$$= \frac{n \left(2 - \frac{1}{\ln(n)} \right) + 1}{2 \ln(n+1)} > \quad (9)$$

Кроме того, выражение $\frac{1}{\ln(n)}$, при росте n начинает от $= 2$ до бесконечности стремится к 0 , то значение выражения $\frac{1}{\ln(n)}$ монотонно убывает от $1,442695...$ и стремится к 0 . Так изменяется выражение (9) к выражению (10):

$$> \frac{n(2-1)+1}{2 \ln(n+1)} = \frac{n+1}{2 \ln(n+1)} \quad (10)$$

Таким образом, получившееся неравенство, поскольку правая часть которой есть, с одной стороны, функция строго монотонно растущей с ростом n , а с другой стороны, что левая часть неравенства строго превышает правую.

$$\frac{(n+1)^2}{\ln(n+1)^2} - \frac{n^2}{\ln(n)^2} > \frac{1}{2} \frac{n+1}{\ln(n+1)} \quad (11)$$

или

$$\pi(n+1)^2 - \pi(n^2) > \frac{1}{2} \pi(n+1).$$

Следовательно, это неравенство (11) и является доказательством гипотезы Лежандра.

Заключение.

Открытые (нерешённые) математические проблемы — задачи, которые рассматривались математиками, но до сих пор не решены. Часто имеют форму гипотез, которые предположительно верны, но нуждаются в доказательстве.

Часть из них относятся к Открытые проблемы в теории чисел. Одна из них является Гипотеза Лежандра (о простых числах). "согласно которой для любого натурального n , существует простое число между n^2 и $(n+1)^2$ ".

К сожалению, мною написанная статья несколько примитивна, ввиду моей инвалидности. Но ведь найдётся хоть кто-нибудь, кто либо разгромит эту статью (ткнув пальцем в конкретное значение), либо будет более обширно и грамотно её использовать.

Самое плохое, если никто ничего не ответит, т.к. никто не прочитает.

С уважением,

Ёлочкин Сергей Владимирович
Россия, Тюмень, ecb@list.ru

Список литературы:

1. "Доказательство и расширение гипотезы Лежандра в теории простых чисел", Дружинин, В.В., Лазарев, А.А., Научно-технический вестник Поволжья. 2014 (5):34-36.
2. "Гипотеза Лежандра (о простых числах)", Материал из Википедии — свободной энциклопедии,
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%93%D0%B8%D0%BF%D0%BE%D1%82%D0%B5%D0%B7%D0%B0_%D0%9B%D0%B5%D0%B6%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B0
3. Бухштаб А.А. Теория чисел. Издательство «Просвещение», Москва, 1966. 384 с.
4. "Справочный по математике (для научных работников и инженеров)", Корн Г., Корн Т. Издательство «Наука», Москва, 1972 г.
5. "Справочный по специальным функциям", под редакцией М. Абрамовича и И. Стиган, Издательство «Наука», Москва, 1979 г.

ISSN 2541-9250
НАУКА ЧЕРЕЗ ПРИЗМУ ВРЕМЕНИ
Международный научный журнал
Ежемесячное научное издание
№9 (42) 2020

ISSN 2541-9250



9 772541 925005 >

Библиографическое описание статьи:

Елочкин С.В. Решение гипотезы Лежандра с помощью преобразований логарифмических формул // Наука через призму времени. – 2020. – №9 (42). – с. 5-8



<http://www.naupri.ru/journal/2650>

© Елочкин С.В., 2020

© Редакция научного журнала «Наука через призму времени», 2020