

УДК 681.5.037.2

ПРИМЕНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ ГУРВИЦА, НАЙКВИСТА И МИХАЙЛОВА ДЛЯ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТОЙ АВТОМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ РЕГУЛИРОВАНИЯ

Климова Татьяна Георгиевна

кандидат технических наук, доцент кафедры

Зыкина Анастасия Николаевна

магистрант кафедры «Релейная Защита и Автоматизация Энергосистем»

Национальный исследовательский университет «МЭИ», г.Москва

Аннотация. Одним из главных условий работоспособности системы автоматического регулирования является устойчивость. Большинство автоматических систем являются замкнутыми системами, у которых выходная величина через обратную связь подается на вход системы, где сравнивается с задающим воздействием. Нормально функционирующая система стремится уменьшить разность между значениями задающего воздействия и регулируемой величины. Однако в ряде случаев может получиться так, что эта разность будет не уменьшаться, а возрастать с течением времени, то есть система будет неустойчивой. Поэтому одной из основных задач теории автоматического регулирования является исследование устойчивости автоматических систем. В данной статье на примере линейной системы регулирования определена эквивалентная передаточная функция для последующего анализа устойчивости по алгебраическим и частотным критериям.

Ключевые слова: устойчивость, система, регулирование, обратная связь, передаточная функция.

Устойчивость - способность системы возвращаться в исходное состояние или близкое к исходному после прекращения возмущений, выведших систему из этого состояния. Неустойчивая система может привести управляемый объект в аварийное состояние, потому что не возвращается в исходное положение, а непрерывно удаляется от него. В данной статье рассмотрена линейная замкнутая система автоматического регулирования, состоящая из пропорционально-дифференциального регулятора, а также возбудителя и генератора, которые представлены апериодическими звеньями, имеющими между собой связи. Исследуемая автоматическая система регулирования (АСР) имеет устройство отрицательной обратной связи, позволяющее регулировать задающее воздействие в зависимости от отклонения выходной величины от предписанного закона ее изменения при действии на генератор различных возмущающих воздействий. Следует отметить, что если линейная АСР устойчива, то устойчива

и реальная АСР, при этом никакие отброшенные при линеаризации члены не могут изменить ее устойчивости, а если линейная АСР находится на границе устойчивости, то судить по ней об устойчивости реальной АСР нельзя, необходим анализ отброшенных при линеаризации членов.

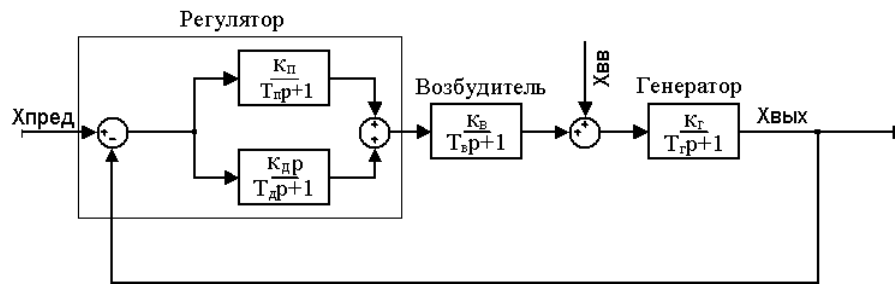


Рисунок 1. Схема исследуемой АСР

Таблица 1. Параметры исследуемой АСР

$K_Г$	$T_Г, с$	$K_В$	$T_В, с$	$K_П$	$T_П, T_Д, с$	$K_Д$
0.7	6	1.8	0.3	35,3	0.7	3

Любое движение линейной системы представляет сумму свободного и вынужденного движений:

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{вын}(t)$$

$x_{св}(t)$ – движение, возникающее при отсутствии входных воздействий.

$x_{вын}(t)$ – движение, возникающее под влиянием входных воздействий из состояния покоя.

Согласно тому, что устойчивость – свойство системы возвращаться в исходное состояние равновесия после снятия воздействия, выведшего систему из этого состояния, можно заключить, что устойчивость зависит только от характера свободного движения системы, а вынужденная составляющая выходной величины на нее не влияет. Система будет устойчивой, если свободная составляющая переходного процесса стремится к нулю с течением времени:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} X_{св}(t) = 0 \quad (1)$$

Далее, опустив ряд математических операций, получаем, что условие (1) выполняется только, если действительные части всех корней характеристического уравнения системы являются отрицательными, при этом действительные корни рассматриваются как частный случай комплексных корней, у которых мнимая часть равна нулю. Соответственно, для устойчивости линейной стационарной АСР необходимо и достаточно, чтобы действительные части всех корней характеристического уравнения системы были отрицательными.

Передаточная функция (зависимость выходной величины от входной) для любого звена АСР имеет вид:

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{X_{БЫХ}}{X_{ВХ}}$$

$D(p)$ – характеристический оператор линейной системы;

$K(p)$ – оператор воздействия линейной системы;

Рассмотрим АСР, представленную на рисунке 1, при условии отсутствия обратной связи. Передаточная функция относительно возмущающего воздействия X_{BB} будет выглядеть следующим образом:

$$X_{BbIX} = \frac{K_{\Gamma}(p)}{D_{\Gamma}(p)} \cdot X_{BB}$$

$$X_{BbIX} \cdot D_{\Gamma}(p) = K_{\Gamma}(p) \cdot X_{BB} \quad (2)$$

При $K_{\Gamma}(p) \cdot X_{BB} = 0$ выражение (2) представляет собой уравнение свободного движения, а при $K_{\Gamma}(p) \cdot X_{BB} \neq 0$ – уравнение вынужденного движения.

Уравнение разомкнутой АСР для предписанного воздействия с учетом того, что передаточная функция последовательного соединения звеньев равна произведению передаточных функций звеньев, входящих в это соединение, имеет вид:

$$X_{BbIX} \cdot D_{\Gamma}(p) \cdot D_B(p) \cdot D_P(p) = K_{\Gamma}(p) \cdot K_B(p) \cdot K_P(p) \cdot X_{BB} \quad (3)$$

Из (2) и (3) видно, что в разомкнутой системе уравнение свободного движения и уравнение вынужденного движения зависят от точки приложения возмущающего воздействия.

Найдем передаточную функцию относительно X_{BB} для замкнутой АСР, изображенной на рисунке 1, для этого необходимо выделить передаточную функцию $W_{II}(p)$ от точки приложения воздействия до точки съема сигнала, считающегося выходным, и передаточную функцию $W_{OC}(p)$ всей остальной части контура, расположенной в цепи обратной связи.

$$W_{3AM}(p) = \frac{W_{II}(p)}{1 + W_{II}(p) \cdot W_{OC}(p)}$$

$$\begin{aligned} W_{3AM}(p) &= \frac{\frac{K_{\Gamma}(p)}{D_{\Gamma}(p)}}{1 + \frac{K_{\Gamma}(p)}{D_{\Gamma}(p)} \cdot \frac{K_B(p)}{D_B(p)} \cdot \frac{K_P(p)}{D_P(p)}} = \frac{\frac{K_{\Gamma}(p)}{D_{\Gamma}(p)}}{1 + \frac{K_{paz}(p)}{D_{paz}(p)}} = \frac{\frac{K_{\Gamma}(p)}{D_{\Gamma}(p)} \cdot D_{paz}(p)}{D_{paz}(p) + K_{paz}(p)} \\ &= \frac{K_{\Gamma}(p) \cdot D_B(p) \cdot D_{\Gamma}(p)}{D_{paz}(p) + K_{paz}(p)} \quad (4) \end{aligned}$$

$$X_{BbIX} \cdot (D_{paz}(p) + K_{paz}(p)) = X_{BB} \cdot (K_{\Gamma}(p) \cdot D_B(p) \cdot D_{\Gamma}(p)) \quad (5)$$

Из (4) следует, что в замкнутой системе уравнение свободного движения не зависит от точки приложения возмущающего воздействия, так как знаменатель передаточной функции замкнутой АСР не меняется при изменении точки приложения возмущающего воздействия. На основании (1) и (5) можно заключить, что устойчивость замкнутой системы не зависит от точки приложения возмущающего воздействия.

Используя алгебраические и частотные критерии устойчивости, можно определить имеются ли корни с положительной действительной частью, не находя числовые значения самих корней. Поэтому в данной статье оценка устойчивости замкнутой АСР осуществляется с помощью наиболее распространенных критериев устойчивости в инженерной практике.

1. Критерий Гурвица

Данный алгебраический критерий устанавливает необходимые и достаточные условия отрицательности действительной части корней в форме ограничений, накладываемых на определенные комбинации коэффициентов характеристического уравнения. Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и все главные диагональные миноры матрицы Гурвица были положительными. Критерий Гурвица целесообразно применять для анализа устойчивости систем не выше пятого порядка, так как с увеличением порядка вычисления определителей становятся громоздким и растет число условий, по которым можно говорить об устойчивости системы.

Определим эквивалентную передаточную функцию разомкнутой и замкнутой АСР в соответствии с данными в таблице 1:

$$\begin{aligned}
 W_{раз}(p) &= W_{рег}(p) \cdot W_{воз}(p) \cdot W_{ген}(p) = \frac{3p + 35,3}{0,7p + 1} \cdot \frac{1,8}{0,3p + 1} \cdot \frac{0,7}{6p + 1} \\
 &= \frac{3p + 35,3}{0,7p + 1} \cdot \frac{1,26}{1,8p^2 + 6,3p + 1} = \frac{44,478 + 3,78p}{1,26p^3 + 6,21p^2 + 7p + 1} \\
 W_{пред.зам}(p) &= \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)} = \frac{\frac{44,478 + 3,78p}{1,26p^3 + 6,21p^2 + 7p + 1}}{1 + \frac{44,478 + 3,78p}{1,26p^3 + 6,21p^2 + 7p + 1}} \\
 W_{пред.зам}(p) &= \frac{44,478 + 3,78p}{1,26p^3 + 6,21p^2 + 7p + 1 + 44,478 + 3,78p} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение для замкнутой системы, исходя из (4) и (6):

$$\begin{aligned}
 F(p) &= D_{раз}(p) + K_{раз}(p) = 1,26p^3 + 6,21p^2 + 7p + 1 + 44,478 + 3,78p = \\
 &= 1,26p^3 + 6,21p^2 + 10,78p + 45,478 \quad (7)
 \end{aligned}$$

Все коэффициенты характеристического уравнения имеют значения больше нуля:

$$a_0 = 1,26, \quad a_1 = 6,21, \quad a_2 = 10,78, \quad a_3 = 45,478 \quad (8)$$

Рассматриваемая система является системой третьего порядка. Составим матрицу Гурвица для данной системы:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$$

Запишем главные диагональные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_3 = a_3 \cdot \Delta_2$$

Первый диагональный минор будет положителен, если выполняется условие (8). Третий диагональный минор будет положителен, если выполняется условие (8) и второй диагональный минор положителен. Из этого следует, что для системы n-го порядка достаточно проверить (n-2) определителя Δ .

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,21 & 45,478 \\ 1,26 & 10,78 \end{bmatrix} = 6,21 \cdot 10,78 - 1,26 \cdot 45,478 = 9,64 > 0 \quad (9)$$

В соответствии с (8) и (9) можно заключить, что рассматриваемая АСР устойчива по критерию Гурвица.

Далее рассмотрим частотные критерии, позволяющие по виду частотных характеристик АСР судить об их устойчивости. Их преимуществом является наглядность и отсутствие ограничений на порядок исследуемой системы.

Запишем характеристический оператор в общем виде для системы n-го порядка:

$$F(j\omega) = a_0 \cdot (j\omega - p_1) \cdot (j\omega - p_2) \cdot \dots \cdot (j\omega - p_n)$$

p_i – i-й корень характеристического уравнения

На рисунке 2 изображен i-й корень $F(j\omega)$ в виде вектора на комплексной плоскости. Длина вектора равна модулю комплексного числа, а угол, образованный вектором с положительным направлением действительной оси соответствует $\arg(j\omega - p_i)$.

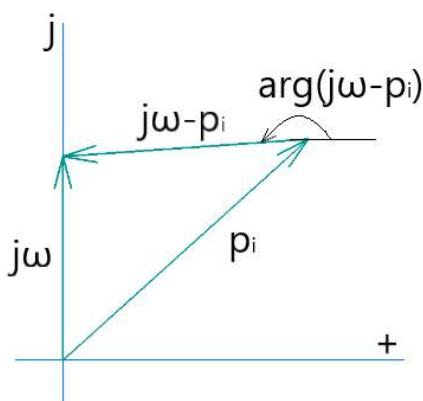


Рисунок 2. Изображение корня характеристического уравнения

Аргумент вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$ равен сумме аргументов векторов $(j\omega - p_i)$:

$$\arg(F(j\omega)) = \sum_{i=1}^n \arg((j\omega - p_n))$$

$-\infty < \omega < \infty$

То же справедливо для приращения аргумента:

$$\Delta \arg(F(j\omega)) = \sum_{i=1}^n \Delta \arg((j\omega - p_n))$$

$-\infty < \omega < \infty$

Из рисунка 3 видно, что в случае нахождения корня в левой полуплоскости, приращение аргумента равно $\sum_{i=1}^n \Delta \arg((j\omega - p_n)) = \pi$, а в правой полуплоскости –

$$\sum_{i=1}^n \Delta \arg((j\omega - p_n)) = -\pi$$

$-\infty < \omega < \infty$

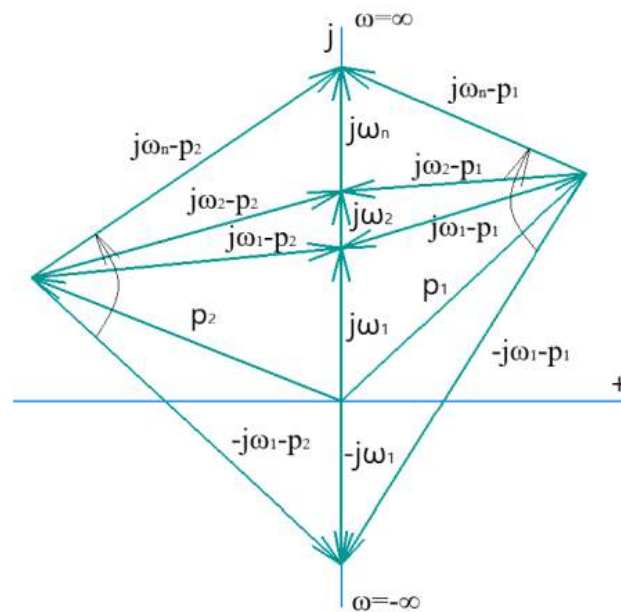


Рисунок 3. Приращение аргумента вектора при изменении частоты

Пусть n – общее число корней характеристического уравнения, m – число корней, лежащих в правой полуплоскости, тогда $n-m$ – число корней, лежащих в левой полуплоскости.

$$\Delta \arg(F(j\omega)) = (n-m) \cdot \pi + m \cdot (-\pi) = (n-2m) \cdot \pi$$

$-\infty < \omega < \infty$

Как было сказано выше, система устойчива, если действительные части всех корней характеристического уравнения системы являются отрицательными. Отсюда следует, что число m должно быть равно нулю:

$$\Delta \arg(F(j\omega)) = \pi n$$

$-\infty < \omega < \infty$

Разложим $F(j\omega)$ на мнимую и действительную части:

$$F(j\omega) = a_0 \cdot (j\omega)^n + a_1 \cdot (j\omega)^{n-1} + \dots + a_{n-2} \cdot (j\omega)^2 + a_{n-1} \cdot (j\omega) + a_n$$

$$F(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$$

$U(\omega) = (a_n - a_{n-2} \cdot \omega^2 + a_{n-4} \cdot \omega^4 - \dots)$ – четная функция

$V(\omega) = \omega \cdot (a_{n-1} - a_{n-3} \cdot \omega^2 + \dots)$ – нечетная функция

Из свойств четности и нечетности функций ($U(\omega) = U(-\omega)$ и $V(\omega) = -V(-\omega)$) получаем, что приращение аргумента вектора $F(j\omega)$ симметрично относительно нуля:

$$\Delta \arg(F(j\omega)) = \Delta \arg(F(j\omega)) = \frac{\pi}{2} \quad (10)$$

$-\infty < \omega < 0$ $0 < \omega < \infty$

Так как физически существуют только положительные частоты, то условием устойчивости является прохождение вектором $F(j\omega)$ n-квadrантов (n-порядок системы) при изменении частоты от 0 до ∞ :

$$\Delta \arg(F(j\omega)) = \frac{\pi}{2}$$

$0 < \omega < \infty$

2. Критерий Михайлова

Этим критерием удобно пользоваться, если известно уравнение замкнутой АСР.

Подставим в (7) $p = j\omega$:

$$F(j\omega) = -j1,26\omega^3 + 6,21\omega^2 + j10,78\omega + 45,478$$

Для облегчения построения годографа Михайлова выделим действительную и мнимую части характеристического оператора:

$$U(\omega) = 45,478 - 6,21\omega^2$$

$$V(\omega) = \omega(10,78 - 1,26\omega^2)$$

Построим годограф Михайлова (геометрическое место точек вектора $F(j\omega)$):

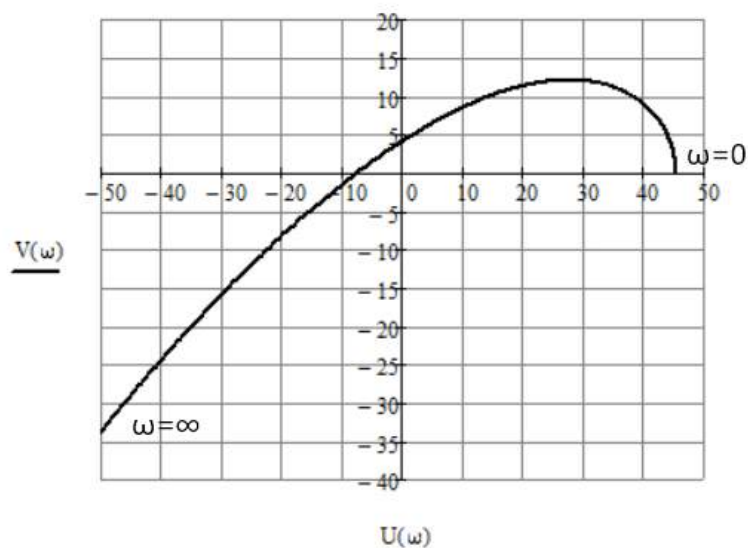


Рисунок 4. Годограф Михайлова исследуемой АСР

При изменении частоты от нуля до бесконечности годограф начинается на действительной положительной оси и последовательно проходит в положительном

направлении (против часовой стрелки) 3 квадранта (порядок системы $n=3$), поэтому система устойчива по критерию Михайлова.

3. Критерий Найквиста

Критерий Найквиста позволяет определить устойчивость замкнутой системы, если она замкнута единичной отрицательной обратной связью, путем построения частотной характеристики разомкнутой системы, что существенно облегчает исследование. Также данный критерий позволяет выявить не только факт устойчивости системы, но и определить запас устойчивости по амплитуде и фазе.

Передаточная функция замкнутой системы по предписанному значению:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1 + W_{раз}(p)}$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы:

$$F_{зам}(p) = 1 + W_{раз}(p) = 1 + \frac{K_{раз}(p)}{D_{раз}(p)} = \frac{D_{раз}(p) + K_{раз}(p)}{D_{раз}(p)} = \frac{K_{зам}(p)}{D_{зам}(p)}$$

Подставим $p = j\omega$:

$$F_{зам}(p) = \frac{D_{раз}(j\omega) + K_{раз}(j\omega)}{D_{раз}(j\omega)}$$

Аргумент отношения двух комплексных чисел равен разности аргументов этих чисел:

$$\begin{aligned} \arg(F_{зам}(p)) &= \arg\left(\frac{D_{раз}(j\omega) + K_{раз}(j\omega)}{D_{раз}(j\omega)}\right) \\ &= \arg(D_{раз}(j\omega) + K_{раз}(j\omega)) - \arg(D_{раз}(j\omega)) \end{aligned}$$

Приращение аргумента при изменении частоты ω от 0 до ∞ :

$$\Delta \arg(F_{зам}(j\omega)) = \Delta \arg(D_{раз}(j\omega) + K_{раз}(j\omega)) - \Delta \arg(D_{раз}(j\omega))$$

$0 < \omega < \infty \qquad \qquad \qquad 0 < \omega < \infty \qquad \qquad \qquad 0 < \omega < \infty$

Порядок полинома $D_{зам}(j\omega)$ равен порядку полиному $D_{раз}(j\omega)$ и равен n . Порядок полинома $K_{раз}(j\omega)$ меньше порядка полинома $D_{раз}(j\omega)$, поэтому порядок $K_{зам}(j\omega)$ имеет порядок $D_{раз}(j\omega)$, т.е. n . При условии, что разомкнутая АСР является устойчивой в соответствии с (10):

$$\Delta \arg(D_{раз}(j\omega)) = \frac{\pi n}{2}$$

$0 < \omega < \infty$

Тогда для замкнутой системы получаем:

$$\Delta \arg(F_{зам}(j\omega)) = \frac{\pi n}{2} - \frac{\pi n}{2} = 0 \quad (11)$$

$0 < \omega < \infty$

Из выражения (11) можно заключить, что при возрастании частоты ω от 0 до ∞ вектор

$F_{зам}(j\omega)$ должен описать угол, равный нулю, то есть вектор должен качаться относительно своего начального положения, а оборот вокруг себя не совершать. Это будет лишь в том случае, когда этот годограф $F_{зам}(j\omega)$ не будет охватывать начало координат.

От годографа $(1 + W_{раз}(j\omega))$ можно перейти к годографу $W_{раз}(j\omega)$, то есть к АФХ разомкнутой системы, которая представляет собой ту же кривую, но сдвинутую на 1 влево по действительной оси.

Соответственно, если разомкнутая система устойчива, тогда для устойчивости системы, замкнутой единичной обратной связью, необходимо и достаточно, чтобы АФХ разомкнутой системы не охватывало точку с координатами $(-1, j0)$.

Теперь применим критерий Найквиста для АСР, изображенной на рисунке 1. Для этого построим АФХ разомкнутой системы:

$$W_{раз}(j\omega) = \frac{44,478 + 3,78j\omega}{-j1,26\omega^3 - 6,21\omega^2 + 7j\omega + 1} = \frac{44,478 + 3,78j\omega}{1 - 6,21\omega^2 + j(7\omega - j1,26\omega^3)}$$

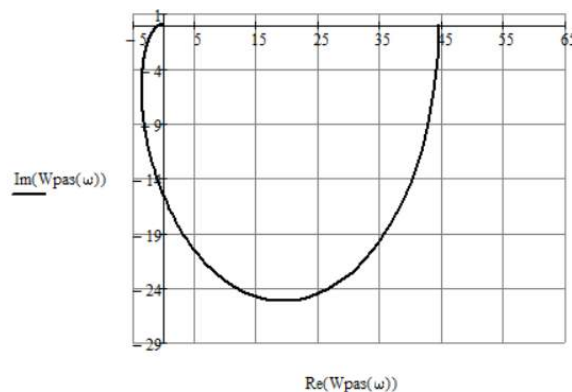


Рисунок 5. АФХ исследуемой разомкнутой АСР

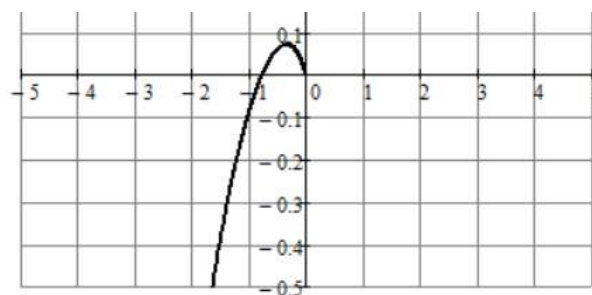


Рисунок 6. АФХ исследуемой разомкнутой АСР (увеличенный масштаб)

Кривая АФХ для АСР в разомкнутом состоянии не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, следовательно, АСР и в замкнутом состоянии устойчива по критерию Найквиста.

Для графического определения запаса устойчивости АСР по амплитуде и фазе строится АФХ для разомкнутой АСР и окружность с радиусом $R=1$.

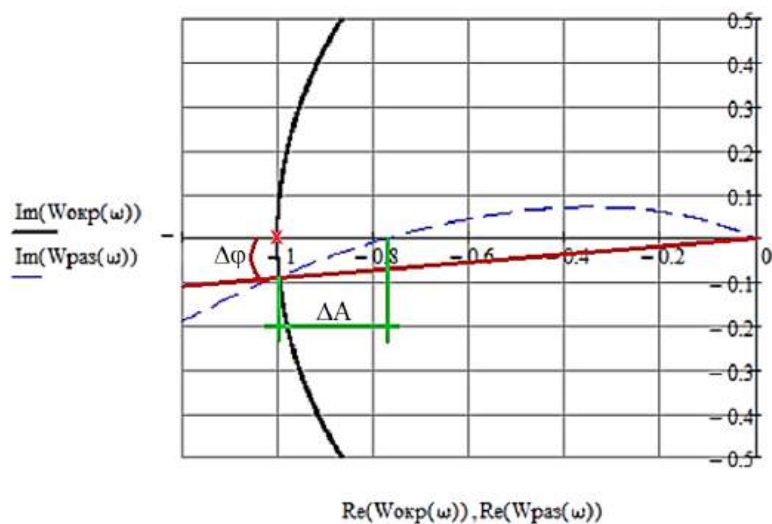


Рисунок 7. Нахождение запаса устойчивости по амплитуде и фазе

Запас устойчивости по фазе определяется величиной $\Delta\varphi$, на которую нужно повернуть АФХ по часовой стрелке, чтобы система оказалась на границе устойчивости. Для рассматриваемой системы: $\Delta\varphi = 4^\circ$.

Запас устойчивости по амплитуде определяется величиной ΔA допустимого подъема характеристики, при котором система окажется на границе устойчивости. Для рассматриваемой системы: $\Delta A = 0,22$.

В ходе работы была проведена оценка устойчивости системы по алгебраическому и частотным критериям. По всем критериям система оказалась устойчивой. Рассмотренные критерии устойчивости разными способами выявляют одинаковое условие, а именно, имеются ли среди корней характеристического уравнения замкнутой системы корни с положительной вещественной частью. Поэтому все они дают одинаковый результат в оценке устойчивости системы. При использовании любого из рассмотренных критериев в первую очередь следует проверить выполняется ли необходимое условие устойчивости, то есть являются ли все коэффициенты характеристического уравнения системы положительными числами.

Выбор того или иного критерия при исследовании конкретной АСР осуществляется в зависимости от исходных данных. Если известны дифференциальные уравнения системы, то чаще применяют алгебраические критерии устойчивости. При наличии АФХ разомкнутой системы или возможности снятия ее экспериментально используется метод Найквиста. Если задано уравнение замкнутой системы, то в большинстве случаев оценка устойчивости производится по критерию Михайлова. Также с помощью критериев можно оценить влияние отдельных параметров элементов системы на ее устойчивость и найти область допустимых значений интересующего параметра, при нахождении в которой система будет устойчива.

Список литературы:

1. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Автоматическое регулирование непрерывных линейных систем. - М.: Энергия, 1980.
2. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981.
3. Коротков, В. Ф. Автоматическое регулирование в электроэнергетических системах : М. : Изд. дом МЭИ, 2013 . – 416 с. - ISBN 978-5-383-00771-6
4. Ротач В. Я. - Теория автоматического управления. – 5-е изд., перераб. и доп . – М. : Изд. дом МЭИ, 2008 . – 396 с.