

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ГИПОТЕЗЫ ЭНДРЮ БИЛА

Ведерников Сергей Иванович

пенсионер, г. Москва

Аннотация. Методы доказательства Гипотезы Била, использованные в статье, заключаются в возможности показать базовое уравнение в виде равноценного ему, позволяющего представить значение выражения разностью квадратов двух нечётных чисел и использовать особенности её разложения на множители.

Ключевые слова: разность квадратов, общий делитель, разложение на множители.

Имеется: $A^2 + B^2 = C^2$, (1) A, B, C, x, y, z – целые, положительные числа, $x, y, z > 2$.

Доказать: A, B, C имеют общий простой делитель.

Доказательство.

Пусть $C > A > B$. Определимся с чётностью A, B, C . A именно: два из этих чисел должны быть нечётными, а одно чётным. (Случай одновременной чётности A, B, C можно исключить из детального рассмотрения, поскольку эти числа заведомо имеют общий простой делитель – 2.) Примем A и C нечётными числами, а B чётным числом, поскольку принципиальной разницы между числами A и B нет. (О возможности чётного C будет обговорено ниже.)

Исходя из посыла, что любое чётное число, имеющее делителем при $n \geq 3$, можно выразить разностью квадратов двух нечётных чисел, произведём следующие преобразования.

Преобразуем ф. (1).

$$C^2 - A^2 = B^2. (2)$$

Прибавим к левой и правой частям ф. (2) $2 \cdot A^x$.

$$C^2 - A^2 + 2A^x = B^2 + 2A^x (3)$$

Выразим ф. (2) и ф. (3) следующим образом:

$$C^2 - A^2 = 2 \cdot B^2 (3)$$

$$C^2 - A^2 + 2A^x = 2B^2 + 2A^x (4)$$

В формуле (4) число $(2^{x-1} \cdot B^2 + A^x)$ нечётное, которое можно обозначить как k , но для дальнейшего доказательства предположим, что $(2^{x-1} \cdot B^2 + A^x) = B^2$ поскольку число $2(2^{x-1} \cdot B^2 + A^x)$ нельзя принять n -ой степенью целого числа при $n \geq 2$ т. к. оно имеет только один множитель 2.

Запишем ф. (3) и ф. (4) следующим образом:

$$C - A = B; (5)$$

$$C + A = 2B. (6)$$

Примем для простоты $C^z = C_1$, а $A^x = A_1$.

Тогда ф. (5) и ф. (6) примут вид:

$$C_1 - A_1 = B; (7)$$

$$C_1 + A_1 = 2B. (8)$$

Перемножим левые и правые части ф. (7) и ф. (8).

$$C_1^2 - A_1^2 = 2B \cdot B (9)$$

Формула (9) не что иное, как выражение чётного числа $2 \cdot B' \cdot B_2'$ разностью квадратов двух нечётных чисел.

Известно, что сумма и разность двух нечётных чисел, числа чётные, но одно из них имеет делителем только одно число 2, а второе – минимум 2^2 .

Вариантов разложения чётного числа в степени $n \geq 3$ на сумму и разность двух нечётных чисел может быть столько, сколько возможно сочетаний пар множителей, составляющих это число, но для каждой пары множителей возможен только один случай. В рассматриваемом моменте важна одна особенность такого разложения, заключающаяся в том, что его нужно разделить на два способа.

1-ый способ: множители разложения кроме числа 2 имеют ещё один или несколько простых делителей.

2-ой способ: множители разложения не имеют общего делителя, кроме числа 2.

Выполним действия аналогичные рассмотренным автором в Случае 2 «Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления» ф.(6) и ф.(7). [1]

Сложим почленно левые и правые части ф. (7) и ф. (8).

$$2C_1 = 2B + B \quad \begin{array}{r} C_1^2 - A_1^2 = B^2 \\ \hline C_1^2 - A_1^2 = B^2 \\ \hline C_1^2 - A_1^2 = B^2 \end{array}$$

$$C_1^2 - A_1^2 = 2^3 \cdot B (10)$$

Вычтем почленно ф. (7) из ф. (8).

$$2A_1 = 2B - B \quad \begin{array}{r} C_1^2 - A_1^2 = B^2 \\ \hline C_1^2 - A_1^2 = B^2 \\ \hline C_1^2 - A_1^2 = B^2 \end{array}$$

$$A_1^2 - B^2 = 2^3 \cdot B (11)$$

Рассмотрим 1-ый способ.

Из ф. (10) и ф. (11) видно, что если B_2^y и B_1^y имеют общий нечётный делитель, поскольку B_2^y нечётное число, то этот делитель имеют числа A_1 и C_1 .

Проиллюстрируем это на примере разложения на множители числа 6^3 . Примем ~~$6=2 \cdot 3$~~ ~~$36=2^2 \cdot 3^2$~~ В данном случае условие для разложения чётного числа на множители по формуле разности квадратов двух нечётных чисел соблюдено, и первый множитель имеет сомножителем только одно число 2. Кроме того оба множителя имеют общий делитель 3.

Сложим оба множителя: $6 + 36 = 42$. Найдём среднее арифметическое: $42 : 2 = 21$. Это первое нечётное число. Вычтем из него второй множитель: $21 - 6 = 15$. Это второе нечётное число. Имеем: ~~$21=3 \cdot 7$~~ ~~$15=3 \cdot 5$~~ , где все числа выражения имеют общий простой делитель 3.

Следовательно, предположение о том, что числа A, B, C могут иметь общий делитель, обосновано.

Рассмотрим 2-й способ, когда множители разложения не имеют общего делителя кроме числа 2.

Из ф. (10) и ф. (11) видно, что при отсутствии общего делителя в числах B_2^y и B_1^y , общего делителя не будет и у чисел A, B, C, что соответствует условию о взаимно простых числах X, Y, Z в «Полном доказательстве Великой теоремы Ферма методом деления».

Обратимся к числу, имеющему два степенных сомножителя. $6^3 = 2^3 \cdot 3^3$. Выразим ~~$6=2 \cdot 3$~~ ~~$16=2^4$~~ ~~$4=2^2$~~ Условия для выражения числа разностью квадратов двух нечётных чисел соблюдены: ~~$54=2 \cdot 3^3$~~ ~~$27=3^3$~~ и $4=2^2 \cdot 1^3$, (Нужно пояснить значение 2^2 . В ф. (10) и ф. (11) она выражена как $2^{(y-1)}$.)

Сложим множители 54 и 4. $54 + 4 = 58$.

Найдём среднее арифметическое. $58 : 2 = 29$ – это первое нечётное число.

Вычтем из него второй множитель. $29 - 4 = 25$ – это второе нечётное число.

Имеем: ~~$29=29 \cdot 1$~~ ~~$25=5^2$~~ .

Здесь члены выражения не имеют общего делителя, а число $8 = 2^3$, множитель числа, поделено на 2 и 4. Подобным образом происходит разложение на множители любой пифагоровой тройки. [2] (См. «Полное доказательство Великой теоремы Ферма методом деления» Общий случай. Формулы (3а) и (4а).) [1] Отсюда можно сделать вывод о том, что это общее правило разложения на множители по формуле разности квадратов двух нечётных чисел любого чётного числа в степени n при $n > 2$, если множители разложения не имеют

общего делителя, т. е. должны быть в степени n , кроме чисел 2 и $2^{(n-1)}$. (См. Случай 2, формулы (6) и (7), «Полного доказательства Великой теоремы Ферма методом деления».) [1]

Ранее было предположено, что $C^2 - A^2 = 2B^y$ что согласуется с верхним абзацем. Рассмотрим ф. (9). $C^2 - A^2 = 2B^y$ Примем $B \cdot B_2 = B_3$. Имеем:

$$C^2 - A^2 = 2B_3 \quad (12)$$

Очевидно, что разложение числа $2 \cdot B_3^y$ на множители по формуле разности квадратов нечётных чисел не соответствует выше рассмотренному условию, зато этому условию соответствует разложение на множители числа B_3^y . Поэтому выразим разностью квадратов чисел C_2 и A_2 . Тогда ф. (12) будет такой:

$$C_2^2 - A_2^2 = 2B_3^y \quad (13)$$

Разложим на множители левую и правую части ф. (13).

$$(C_2 - A_2)(C_2 + A_2) = (\sqrt{2} \cdot C_2 - \sqrt{2} \cdot A_2)(\sqrt{2} \cdot C_2 + \sqrt{2} \cdot A_2). \quad (14)$$

Формула (14) показывает, что при равенстве $C^2 - A^2 = 2B^y$ в ф. (4), уравнение (9) не имеет решения в целых числах.

Рассмотрим снова уравнение (9): $C^2 - A^2 = 2B^y$ Предположим, что число не является целым числом в степени y . Примем $B_2^y = k$. Тогда ф. (9) примет вид:

$$C^2 - A^2 = 2kB \quad (15)$$

Примем $B = (C_3 - A_3)$ Запишем ф. (15) так:

$$C^2 - A^2 = 2k(C_3 - A_3) \quad (16)$$

Разложим левую и правую части уравнения (16) на множители.

$$(C - A)(C + A) = 2k(C_3 - A_3) \quad (17)$$

Из ф. (17) следует, что уравнение (16) невозможно разложить на целочисленные множители, поскольку $\sqrt{2}$ - иррационален, а $\sqrt{k}$ - есть корень из нечётного числа.

Кроме того, из ф. (10) и ф. (11), следует, что C_1 и A_1 , а следовательно, C^z и A^x невозможно разложить на целочисленные множители, поскольку невозможно разложить правую часть ф. (11) на целочисленные множители по формуле разложения на множители разности $n - x$ степеней, а правую часть ф. (10) - на целочисленные множители по формуле разложения на множители суммы $n - x$ степеней при $n = 2 \cdot k + 1$ [3] (См. Случай 2 « Полного доказательства... » ф. (6) и ф. (7), а также ф. (8) и ф. (9).) [1]

Вывод: при отсутствии общих множителей в числах A, B, C уравнение не имеет решения в целых числах.

Поскольку уравнение $X^n + Y^n = Z^n$, при $n > 2$, является частным случаем уравнения (1), то этот вывод относится и к теореме Ферма.

Нами рассмотрен случай, когда число B ф. (1) - чётное. Предположим, что чётным является число C , а числа A и B - нечётные.

Преобразуем ф. (1), вычтя из левой и правой её частей $2 \cdot B^y$. Имеем:

$$\cancel{A^x} - \cancel{B^y} = \cancel{C^z} - 2B^y \quad (18)$$

Перемножим левые и правые части ф. (1) и ф. (18). Имеем:

$$\cancel{A^x} - \cancel{B^y} = \cancel{C^z} - 2B^y \quad (19)$$

Доказательство, следующее за ф. (19), аналогично выше рассмотренному.

Следовательно, утверждение, что целые положительные числа A, B, C , при целых положительных $x, y, z > 2$, имеют общий простой делитель в уравнении доказано, а значит Теорема (гипотеза) Била доказана.

Список литературы:

1. Ведерников С. И. Полное доказательство Великой теоремы Ферма методом деления. Журнал «Наука через призму времени». №10(19) 2018. Международный научный журнал.
2. Серпинский В. Пифагоровы треугольники. М.: Учпедгиз, 1959.
3. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Математика: Справочные материалы. М.: Просвещение, 1990.